SITUACIÓN DE MODELACIÓN EN FENÓMENOS FÍSICOS EN CONTEXTO DE INGENIERÍA CIVIL POR MEDIO DE LA INTERPOLACIÓN Y PREDICCIÓN

Hipólito Hernández , Gabriela Buendía
Cimate, Facultad de ingenieria, Univesrsidad Autónoma de Chiapas
polito_hernandez@hotmail.com, Buendiag@hotmail.com
Experiencia de aula (Cartel)

Resumen

En esta investigación se contextualizaron fenómenos físicos y propios de ingeniería civil, como: la variación de la velocidad, variación de temperatura, movimiento periódico, e infiltración de agua en suelos. Los primeros dos fenómenos se presentaron como enunciado de salón de clase y los dos últimos se realizaron mediciones a través de un sensor de movimiento, en la infiltración de agua de un suelo determinado, se obtuvo la medición de la variación de la columna de agua con respecto al tiempo. Las situaciones fueron abordadas a través de la práctica social de la predicción y la herramienta de interpolación para la modelación matemática. Esta forma de ver a la matemática consideramos que está proporcionando referentes didácticos para la reconstrucción del cálculo escolar.

Palabras claves: Situación, interpolación, predicción, práctica social, modelación matemática

Introducción

En este trabajo se abordaron contextos físicos y de ingeniería civil, a través de la práctica social de la predicción y la interpolación bajo una socioepistemología de prácticas (Cantoral, 2001). Hernández (2006) ha reportado aspectos de la emergencia de la interpolación y de la predicción en forma implícita desde los estudios del movimiento de los cuerpos por los filósofos del colegio de Merton, los estudios hechos por Oresme, hasta el estudio del movimiento realizado por Galileo. En esta época surge la noción de modelación, graficación y esto da origen a la matematización del movimiento. La interpolación y predicción aparecen en forma explícita en el marco epistémico de Newton puesto que se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidas las condiciones iniciales (Muñoz, 2000; Hernández, 2003). La matematización del sistema genera construcción de herramientas como el binomio de Newton y la serie de Taylor. Por otra parte, Buendía (2005) reporta un estudio socioepistemológico sobre la práctica de predicción como generadora de conocimiento para los fenómenos periódicos.

Se trabajaron situaciones que involucran la interpolación y la predicción en el caso de: Movimiento uniformemente acelerado, variación de temperatura, movimiento periódico y la infiltración de agua en un suelo determinado. Para registrar las mediciones de los experimentos de movimiento periódico, se utilizaron equipos electrónicos como sensores de movimiento conectados a través de una calculadora graficadora. En todos los experimentos se utilizó la herramienta de interpolación y la práctica social de predicción para la modelación matemática. De esta forma se recaba información con respecto a la forma de construcción del conocimiento a través de situaciones diseñadas en contextos físicos y problemas de ingeniería civil. Estas construcciones nos proporcionan elementos de análisis para posteriormente ser presentadas a los estudiantes como experiencias de aprendizaje. Ello proporciona elementos para un cambio epistemológico del Cálculo escolar a través de una visión de Newton-Taylor considerando las prácticas de la predicción e interpolación como reorganizadores del Cálculo escolar.

Epistemología del binomio de Newton y la serie de Taylor

Cantoral (2001) menciona que el proceso de cambio en la naturaleza se registra en la variación de las variables. Precisa el reconocimiento de los procesos de predicción de corto alcance (la variación del movimiento local) y la predicción de largo alcance (estudio de la variación del movimiento global). El movimiento general y los fenómenos de flujo en particular poseen, entonces, herencia: el estado ulterior $P + PQ$ del fenómeno de variación $P \to P + PQ$ depende completamente de las circunstancias que caracterizan al estado de facto P y la evolución de un sistema está completamente determinado por sus variaciones primeras. Esta conexión entre estados precisa como sustento primario el reconocimiento de la predicción asociada con la variación y cambio en la naturaleza: PQ es la variación de la variable independiente.

Con esta idea y en la necesidad de predecir, conocer, adelantar, Newton estableció el binomio que hoy en día lleva su nombre y fue dado como:

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + etc \qquad (1)$$

Donde:

$$A = P^{m/n}, \quad B = \frac{m}{n}AQ, \quad C = \frac{m-n}{2n}BQ, \quad D = \frac{m-2n}{3n}CD$$

Si el exponente *m/n* es un número entero no negativo, entonces el binomio de Newton es una serie finita. Si el exponente *m/n* es un número fraccionario o un número negativo entonces el binomio de Newton es una serie infinita.

Según, Edward (1980) en su texto de historia de desarrollo del cálculo, Taylor en su Methodus incrementarum publica su serie y lo obtiene a partir del argumento basado en la fórmula de interpolación de Gregory-Newton. Propone entonces la interpolación:

$$y = y_0 + k\Delta y_0 + k(k-1)/2\Delta^2 y_0 + k(k-1)(k-2)/6\Delta^3 y_0 + \ldots + k\Delta^{k-1} y_0 + \Delta^k y_0. \qquad (2)$$

Donde los coeficientes de la ecuación (1) corresponden a los coeficientes de la ecuación considerando que $k = \frac{x - x_o}{\Delta x}$. En esencia, Taylor consideró a partir del polinomio de interpolación el siguiente proceso: $x = x_o + k\Delta x; k = \frac{x - x_o}{\Delta x}$, y tomando a la variación de la variable independiente muy pequeña $(\Delta x \to 0)$, k muy grande, x fija, llegó a construir la siguiente serie:

$$y = y_0 + (x - x_0)\dot{y}_0/\dot{x}_0 + (x - x_0)^2\ddot{y}_0/2(\dot{x})^2 + (x - x_0)^3\ddot{y}_0/6(\dot{x})^2 + \ldots. \qquad (3)$$

Esta fórmula es la serie de Taylor original e interpreta la razón de fluctuación como derivada. En síntesis, el binomio de Newton y la serie de Taylor son instrumentos de predicción en un contexto de variación.

Aspectos metodológicos

Este trabajo de investigación se realizó a través de la aproximación socioepistemológica, teniendo en cuenta las prácticas sociales como actividad humana y generación de conocimiento matemático.

El corte metodológico que guía el diseño de situación en la presente investigación es primeramente con un análisis a priori como primera etapa de la ingeniería didáctica, en un trabajo posterior se realizará la puesta en escena como segunda etapa y un análisis a posteriori como tercera etapa. Partimos de la epistemología inicial planteada acerca del binomio de Newton y la serie de Taylor como marco de referencia para el diseño de la situación donde la práctica de predicción es incorporada intencional.

Resultados de un análisis a priori de situaciones

En este apartado presentamos los resultados de los cuatro fenómenos explorados y en cada una de ellos presentamos un análisis, los dos primeros se presenta como situaciones de enunciado de salón de clase y los dos últimos como situaciones a priori con las observaciones experimentales.

Situación 1. Movimiento Uniformemente Acelerado

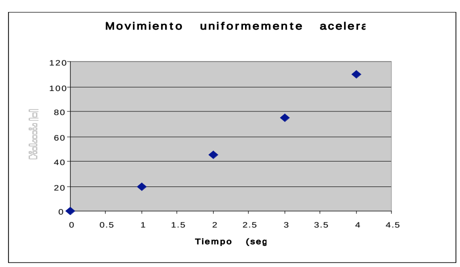
La finalidad de esta situación es mostrar que la predicción y la interpolación están relacionadas mutuamente. Partimos de un ejemplo tradicional de movimiento uniformemente acelerado del texto de física (Benson, 1999) que se recomienda en los cursos de física escolar actual. Con base a esta idea podemos hacer experimentos con dispositivos electrónicos, donde un cuerpo se mueva con velocidad constante y un cuerpo que se mueva con velocidad variable pero con aceleración constante, para obtener las velocidades y posiciones posteriores a través de la predicción e interpolación

Suponga que la velocidad de un automóvil es de 20 m/seg, que durante un tiempo ha aumentado hasta 40 m/seg y que necesita 4 segundos para ir de la posición A hasta la posición B ¿Qué aceleración tiene? ¿Cuáles son las velocidades y posiciones del automóvil para 1, 2, 3, 4 segundos?

En la tabla No. 1 y en la gráfica No. 1 se obtienen los resultados de tiempo y distancia para cada segundo. Estos valores son obtenidos de la interpolación basada en el binomio de Newton.

t (s)	S (m)	Δs	$\Delta^2 s$
$t_o = 0$	$s_o = 0$	$v_o = 20$	$= 5$
$t_o + \Delta t = 1$	$S_1 = 20$	$v_1 = 25$	5
$t_o + 2\Delta t = 2$	$S_2 = 45$	$v_2 = 30$	5
$t_o + 3\Delta t = 3$	$S_3 = 75$	$v_3 = 35$	5
$t_o + 4\Delta t = 4$	$S_4 = 110$	$v_4 = 40$	

Tabla No. 1



Gráfica No. 1

Con base a los resultados de la tabla No. 1. Construimos el binomio de Newton:

$s_2 = s_1 + v_1 \Delta t$, sustituyendo $s_1 = s_0 + \Delta s_0$ y $v_1 = \Delta s_0 + \Delta^2 s_0$

$$s_2 = s_1 + v_1 \Delta t = s_o + 2\Delta s_o + \Delta^2 s_o = (1+\Delta)^2 s_o \qquad (4)$$

El polinomio de interpolación de Newton (ecuación 4) es de segundo grado. Para nuestro problema el polinomio de interpolación de Newton-Gregory es:

$$s_2 = (1+\Delta)^2 s_o = s_0 + k\Delta s_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 s_0 \quad (5)$$

Donde consideramos, $t_k = t_o + k\Delta t; k = \frac{t_k - t_o}{\Delta t}$ (6)

Entonces $k = \frac{t - t_0}{\Delta t} = \frac{t-0}{1}$, sustituyendo k, $\Delta s_0 = 20$, $\Delta^2 s_0 = 5$ en la ecuación (8) se llega a la ecuación cuadrática, en la cual se tiene una relación funcional de distancia y tiempo.

$$S(t) = \frac{35}{2}t + \frac{5}{2}t^2 \quad (7)$$

Usando la ecuación (7), para los tiempos 1, 2, 3, 4, segundos respectivamente, obtenemos: S (1 seg) = 20 m, S (2 seg) = 45 m, S (3 seg)= 75 m, S (4 seg)= 110 m.

En este ejemplo, mostramos el modelo matemático que describe el movimiento enunciado y por medio de la tabla de valores del movimiento y sus diferencias que representan las variaciones del movimiento y llegar a predecir la velocidad, la posición en determinado tiempo, con el binomio de Newton.

Situación 2. Variación de temperatura

La situación de variación de la temperatura presentada es con la finalidad de comprobar como actuaría la práctica social de predecir y la herramienta de predecir para verificar la ley de enfriamiento de Newton cuyo enunciado dice “la variación de la temperatura de un cuerpo con respecto al tiempo es directamente proporcional a la diferencia de temperatura del cuerpo y la temperatura del medio ambiente” y a la vez conocer su modelo matemático que describe este fenómeno físico. En la actualidad en los textos de ecuaciones diferenciales este fenómeno es representado con la ecuación diferencial:

$$\frac{dT(t)}{dt} = k[T(t) - T_m]$$

En el trabajo de Hernández (2006) reporta que por medio de la interpolación como herramienta y predicción como práctica social y las diferencias finitas, se llega a obtener el polinomio de interpolación de Gregory – Newton para el fenómeno de la temperatura. Considerando una temperatura inicial (condiciones iniciales) y por medio de las diferencias finitas obtenemos, las primeras, segundas, n – enésima diferencias finitas variables se obtiene el siguiente polinomio de interpolación:

$$T_n = (1+\Delta)^n T_0 = T_0 + n\Delta T_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 T + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 T_0 + etc.$$

Considerando que $t_n = t_0 + n\Delta t, t_n - t_0 = n\Delta t, n = \frac{t_n - t_0}{\Delta t}$ y Δt muy pequeño ($\Delta t \to 0$), y cuando

$n \to \infty$, $t_n = t$, obtenemos que

$$T_n = T_m + (T_0 - T_m) + k(T_0 - T_m)\frac{(t-t_0)}{1!} + k^2(T_0 - T_m)\frac{(t-t_0)^2}{2!} + k^3(T_0 - T_m)\frac{(t-t_0)^3}{3!} + etc$$

Esta ecuación es la solución de la ecuación diferencial de la ley de enfriamiento de Newton, vista como los procedimientos desarrollados en el polinomio de interpolación a la serie de Taylor, donde consideramos como elemento de análisis la práctica social de predecir, la herramienta de la interpolación en el contexto de la variación de la temperatura. En consecuencia proponemos el siguiente problema que viene enunciado en (Zill, 1993).

Una taza de café cuya temperatura es de 85º C se deposita en un cuarto cuya temperatura es de 18º C. Dos minutos más tarde la temperatura del café es de 80º C. ¿Cuál es la temperatura Después de seis segundos y tres segundos?

Podemos responder a estas preguntas con el binomio de Newton de tercer grado:

$T_1 = T_0 + \Delta T_0 = 85 - 5.00259 = 79.99741$

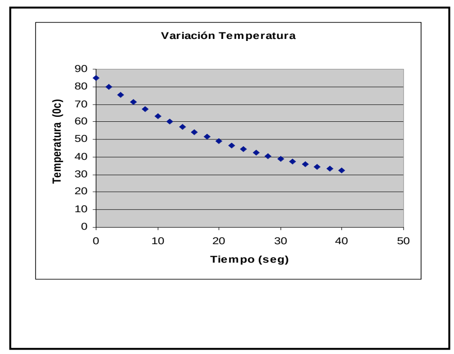
$T_2 = T_0 + 2\Delta T_0 + \Delta^2 T_0 = 85 + 2(-5.00259) + 0.37359 = 75.3684$

$T_3 = T_0 + 3\Delta T_0 + 3\Delta^2 T_0 + \Delta^2 T_0 = 85 + 3(-5.00259) + 3(0.373599 + (-0.0279) = 71.018505$, etc.

Se sigue el mismo procedimiento usando el polinomio de interpolación de Newton de grado mayor para determinar la temperatura para cualquier tiempo (tabla No.2 y en la gráfica No.2).

t(tiempo)	T(temperatura)	ΔT	$\Delta^2 T$	$\Delta^3 T$	Etc.
0.00000	85.00000	-5.00259	0.37359	- .02795	
2.00000	79.99741	-4.62907	0.34564		
4.00000	75.36834	-4.28343			
6.00000	71.08491	-3.96362			
8.00000	67.12129				
Et…					

Tabla No. 2. Variación de temperatura



Gráfica No.2

O bien usando el polinomio de interpolación de tercer grado podemos obtener el valor de la temperatura para cualquier valor del tiempo del intervalo [0,6].

$$T_n = (1+\Delta)^n T_0 = T_0 + n\Delta T_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 T + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 T_0 + etc.$$

Haciendo $n = \dfrac{6-0}{2} = 3$

$$T_n = (1+\Delta)^3 T_0 = 85 + 3(-5.00259) + \frac{3(2)}{2!}(0.37359 + \frac{3(2)(1)}{3!}(-0.02795) + etc. = 71.08505$$

La temperatura para, t=3segundos, $n = \frac{3-0}{2} = 1.5$

$$T_n = (1+\Delta)^3 T_0 = 85 + 1.5(-5.00259) + \frac{1.5(1.5-1)}{2!}(0.37359 + \frac{1.5(1.5-1)(1.5-2)}{3!}(-0.02795) + etc.$$

$= 77.637958$

En la interpolación de Newton de grado *n* se requiere que se utilice *n+1* puntos para una mejor predicción en la interpolación. Desde el punto de vista de predicción se necesita conocer la condición inicial y sus variaciones.

Situación 3. Movimiento periódico

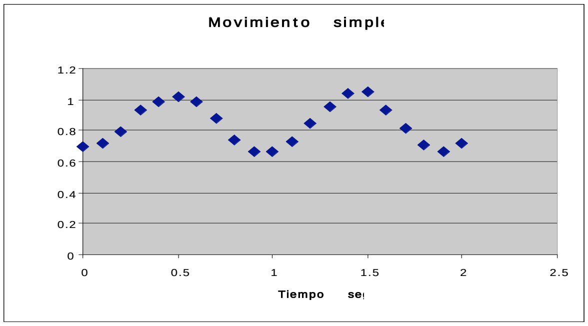
Se diseño un experimento de un resorte en movimiento libre con la finalidad de generar un movimiento periódico, en este experimento se consideró un resorte unido con un objeto y un sensor de movimiento para registrar los datos del tiempo y desplazamiento del fenómeno, además de una calculadora ClassPad para graficar y hacer las primeras, segundas, terceras, cuartas diferencias, etc., como se muestra en la tabla No.3, y la gráfica No. 3. El objetivo de este diseño es con la finalidad de:

a) Verificar el movimiento periódico.
b) Analizar las primeras, segundas, terceras, etc. diferencias y discutir su comportamiento
c) Graficar los datos registrados del tiempo y desplazamiento y discutir su comportamiento en cuanto a su periodicidad a partir de la predicción
d) El uso del binomio de Newton como herramienta de interpolación para predecir el desplazamiento en un tiempo de 7.8 segundos.

No. Datos	t	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	Ect.
1	0	0.7009	0.0209	0.0523	0.0104	-0.156	
2	0.1	0.7218	0.0732	0.0627	-0.146	0.2092	
3	0.2	0.795	0.136	-0.083	0.0628	-0.104	
4	0.3	0.931	0.0523	-0.02	-0.041	0.0316	
5	0.4	0.9833	0.0314	-0.062	-0.01	0.0521	
6	0.5	1.0148	-0.031	-0.073	0.0418	0.0418	
7	0.6	0.9833	-0.104	-0.031	0.0836	-0.052	
8	0.7	0.8787	-0.136	0.0523	0.0314	-0.041	
9	0.8	0.7427	-0.083	0.0837	-0.01	-0.02	
10	0.9	0.659	0	0.0732	-0.0311	-0.02	
11	1	0.659	0.0732	0.0418	-0.052	0.0418	
12	1.1	0.7323	0.115	-0.01	-0.01	-0.041	
13	1.2	0.8473	0.1046	-0.02	-0.052	0.00025	
14	1.3	0.952	0.0837	-0.073	-0.052	0.1775	
15	1.4	1.0357	0.0104	-0.125	0.1253	-0.114	
16	1.5	1.0461	-0.115	-0.00004	0.0104	0.0313	
17	1.6	0.931	-0.115	0.0104	0.0418	0.0209	
18	1.7	0.816	-0.104	0.0523	0.0627		
19	1.8	0.7113	-0.052	0.115			

20	1.9	0.659	0.0627
21	2	0.7218	
Etc.			

Tabla No. 3. Movimiento de un resorte



Gráfica No. 3

Con el binomio de Newton como herramienta se predice el valor del desplazamiento para un tiempo de 7.9 segundos.

$$y(t_k) = (1+\Delta)^k y_0 = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + $$
$$+ \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}\Delta^4 y_0. + etc$$

$$y(7.9) = 0.7009 + 0.79(0.0209) + \frac{0.79(0.79-1)}{2!}(0.0523) + \frac{0.79(0.79-1)(0.79-2)}{3!}(0.0104) +$$
$$+ \frac{0.79(0.79-1)(0.79-2)(0.79-3)}{4!}(-0.156). + .. = 0.69979$$

Considerando que $\begin{aligned} t_k &= t_o + k\Delta t \\ k &= \frac{t_k - t_o}{\Delta t} \end{aligned}$, $k = \dfrac{7.9-0}{10} = 0.79$

En los intervalos [0,0.9], [1,1.9], [2,2.9],…, [7,7.9] los datos y la gráfica son periódico, con estos procesos se puede predecir un movimiento periódico a través de de la predicción e interpolación, además en el análisis de los datos nos proporcionan información de conceptos de cálculo.

Situación 4. Proceso de infiltración de agua en suelos

El problema consiste en la infiltración de agua a través de la superficie del suelo y hacia adentro del mismo, producido por las fuerzas gravitacionales y capilares. La diferencia entre el volumen de agua que llueve en una cuenca y el que escurre por su salida recibe el nombre de pérdidas, debido a la infiltración y vaporización. La infiltración juega un papel importante en la relación lluvia y escurrimiento y, por lo tanto, en los problemas de diseño y predicción asociados a la dimensión y operación de obras hidráulicas.

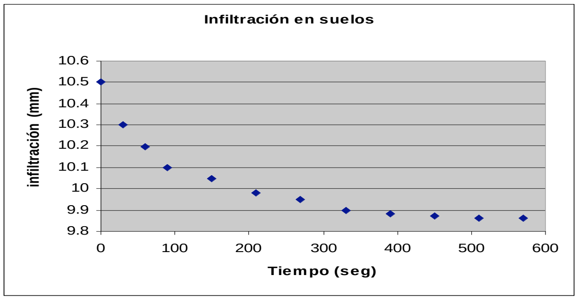
La fórmula más conocida para este fenómeno es la llamada de Horton reportada por Gardner y Widdstoe (1921) y por Horton (1940). $f_p = f_c + (f_0 - f_c)e^{-kt}$. Donde f_p es la capacidad de infiltración y f_0, f_c y k son constantes empíricas.

En el siguiente experimento es con la finalidad de llegar a la modelación matemática del fenómeno de infiltración de agua en suelos, para ello se realizaron mediciones de la infiltración de agua (penetración de la profundidad) de un suelo arenoso los datos forman una gráfica con tangentes de pendiente negativa (ver gráfica No. 4) estas tangentes negativas se muestran en las primeras diferencias en la tabla No. 4, también en la tabla muestran las diferencias de orden mayor y se observa que las variaciones no son constantes, es decir, tiene un comportamiento de forma exponencial con pendientes negativas tendiendo a un valor constante de f_c llamado constante de saturación. De los datos obtenidos del experimento de infiltración de agua en suelos se utilizó la herramienta de interpolación y la predicción para la modelación matemática con la finalidad de predecir la infiltración de agua en un suelo con respecto a un tiempo determinado (tabla No. 4 y en la gráfica No.4). Esta forma de ver a la matemática consideramos que se están proporcionando referentes didácticos para la reconstrucción del cálculo escolar (Hernández, 2006).

Proceso de infiltración de agua en suelos

t(s)	h(mm)	Δh	$\Delta^2 h$	$\Delta^3 h$	$\Delta^4 h$	$\Delta^5 h$
0	10.5	-0.2	0.1	-0.1	0.15	-0.27
30	10.3	-0.1	0	0.05	-0.12	0.25
60	10.2	-0.1	0.05	-0.07	0.13	-0.25
90	10.1	-0.05	-0.02	0.06	-0.12	0.23
150	10.05	-0.07	0.04	-0.06	0.11	-0.18
210	9.98	-0.03	-0.02	0.05	-0.07	0.08
270	9.95	-0.05	0.03	-0.02	0.01	0.01
330	9.9	-0.02	0.01	-0.01	0.02	
390	9.88	-0.01	0	0.01		
450	9.87	-0.01	0.01			
510	9.86	0				
570	9.86					

Tabla No. 4. Proceso de infiltración de agua en suelos



Gráfica No.4.

Con el binomio de Newton en la forma de interpolación se llega a predecir la infiltración de agua en tipo de suelo, como se muestra en el siguiente cálculo.

$$h(t_k) = (1+\Delta)^k h_0 = h_0 + k\Delta h_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 h_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 h_0 +$$

$$+\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!}\Delta^4 h_0. + etc$$

$$h(150) = 10.5 + 5(-0.2) + \frac{5(5-1)}{2!}(0.1) + \frac{5(5-1)(5-2)}{3!}(-0.1)$$

$$+\frac{5(4-1)(5-2)(5-3)}{3!}(0.15) + etc.. = 10.25mm$$

Considerando que $\begin{array}{l} t_k = t_o + k\Delta t \\ k = \dfrac{t_k - t_o}{\Delta t} \end{array}$, $k = \dfrac{150-0}{30} = 5$

Conclusiones

En la situación de movimiento uniformemente acelerado y la variación de la temperatura únicamente se presentaron con la finalidad de mostrar la relación de la predicción y la interpolación para diseñar situaciones como la presentada en el caso del movimiento periódico, infiltración de agua en suelo, estas situaciones sólo se presentaron como un análisis a priori, en trabajos posteriores se reportará la etapa de puesta en escena. En este trabajo se utilizó la herramienta de interpolación y la predicción como práctica social para la modelación matemática y en el análisis nos dan evidencias de la predicción en los fenómenos físicos y problemas de ingeniería. Esta forma de ver a la matemática consideramos que se están proporcionando referentes didácticos para la reconstrucción del cálculo escolar.

Referencias Bibliográfica

Benson, H. (1999). *Física Universitaria*. Editorial CECSA, vol. I. México.

Buendía, G. & Cordero, F. (2005). *Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study*. Educational Studies in Mathematics 58, 299-333.

Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad.* Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Hernández, H. (2003). *Una epistemología de la matematización del movimiento: caso de predicción y variación con las diferencias finitas y la serie de Taylor.* Acta latinoamericana de matemática educativa 16(2), 594-600.

Hernández, H. (2006). *Una visión socioepistemológica de la matematización del movimiento: del binomio de Newton a la serie de Taylor*. Tesis de maestría. Universidad Autónoma de Chiapas. México.

Muñoz, G. (2000). *Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3(2), 131-170.

Gardner, W., Widstoe, J. (1921). *The movement of soil moisture.* Soil Sci. 11:215-232.

Horton, R. E. (1940). *An approach to the physical interpretetion of infiltration capacity.* Soil Sci. AM. Proc. 5, 399-417.

Zill, D. (1993). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones.* Grupo Editorial Iberoamérica. Tercera edición. México.